Финал по геометрии

10 апреля

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу `kazan-mat@mail.ru`. Общие комментарии по задачам смотрите на странице `http://www.kazan-math.info/`. Рекомендуем Вам периодически обновлять страницу, чтобы видеть самые последние общие комментарии. Напоминаем, что решения высылаются одним письмом на адрес `olymp.geom@gmail.com` до 18:00 по московскому времени. Подробные правила оформления Вы можете прочитать на сайте `http://www.kazan-math.info/`. Не забудьте пройти регистрацию!

Желаем успеха!

В следующем блоке задач оценивается полное решение, с обоснованием. Каждая задача оценивается из 7 баллов.

1. Внутри правильного пятиугольника $ABCDE$ отмечены точки K и M, не лежащие на прямой CE, так, что углы EDK и MDC равны, а также равны углы MED и KCD. Всегда ли верно, что $KM \parallel EC$?

2. Когда в остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD и BE, оказалось, что $S_{BDE} \leqslant S_{DEA} \leqslant S_{EAB} \leqslant S_{ABD}$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

3. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются в точке T. Обозначим через P и Q центры описанных окружностей треугольников ABT и CDT соответственно. Докажите, что $4PQ \geqslant AB + CD$.

4. Отметим на плоскости несколько (конечное множество) точек и покрасим их в синий цвет. Для синей точки A синюю точку B назовем *близкой*, если никакая другая синяя точка, отличная от A, не расположена к точке A ближе. Может ли оказаться, что у каждой синей точки есть хотя бы 4 синие близкие точки?

Для каждой из следующих задач приведено «решение». В этом «решении» необходимо найти ошибки, если таковые имеются, объяснить, почему те или иные рассуждения не верны и, возможно, написать верное решение. Конкретное задание к каждой задаче указано курсивом. Максимальный балл за каждую из задач равен 7.

5. В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен $60°$. Докажите, что $AC = BK$.

«Решение» Леонарда. Покажем, что треугольники ACM и BKC равны. Из равенства соответствующих элементов будет следовать, что $BK = AC$. Так как медиана пересекает сторону, к которой проведена, под углом $60°$, а кроме того $AM = MB$, то треугольник BCM — равносторонний. Тогда $BC = CM$, $\angle BCK = 120° = \angle AMC$, а $KC = AM$ по условию, откуда треугольники ACM и BKC равны по первому признаку.

Найдите ошибки, если таковые имеются, оцените написанное в баллах (максимальное — 7, минимальное — 0) и поясните свою оценку, а также напишите верное решение, если указанное содержит существенные неточности.

6. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 85°$, $\angle B = 115°$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите $\angle MAB$.

«Решение» Карла. Так как M лежит на серединных перпендикулярах к AB и CD, она равноудалена от A и B, а также от C и D. Значит, $MA = MB$ и $MC = MD$. Тогда треугольники AMD и MBC равны по трем сторонам. Но тогда $\angle MAD = \angle MBC$, как соответствующие элементы в равных треугольниках, и $\angle MAB = \angle MBA$, как углы при основании равнобедренного треугольника AMB. Но тогда, складывая два полученных равенства, имеем $\angle DAB = \angle ABC$, а по условию эти углы не равны. Значит, такого быть не может.

Найдите ошибки, если таковые имеются. Верное решение здесь писать **не** *нужно.*

7. Пьер и Вильгельм играют в следующую игру. По кругу расставлено $2n$ точек ($n > 3$) на равных расстояниях друг от друга. Они по очереди соединяют точки отрезками, причем из каждой точки может выходить не более 2 отрезков. Вильгельм хочет добиться, чтобы в какой-то момент на плоскости появился прямоугольный треугольник, а Пьер хочет ему помешать. Пьер начинает, ходят по очереди. Сможет ли Вильгельм получить прямоугольный треугольник, как бы ни играл Пьер?

«Стратегия» Вильгельма, позволяющая ему получить прямоугольный треугольник. Посчитаем общее количество прямоугольных треугольников, которые можно получить. В качестве гипотенузы подойдет любой из n отрезков, соединяющих противоположные вершины, а также необходимо выбрать третью вершину треугольника, на что есть еще $2n - 2$ способа. Итого треугольников $(2n - 2)n$. При проведении очередного отрезка Пьер может запретить появление как максимум четырех прямоугольных треугольников, так как если он соединяет точки, из каждой из которых уже был проведен отрезок, то он не дает построить прямоугольные треугольники на тех отрезках, а их можно построить максимум двумя способами. Всего Пьер проведет не более n отрезков, а значит запретит не больше $4n$ прямоугольных треугольников, а всего их $(2n-2)n$, что хотя бы $6n$. Значит, хоть какой-то прямоугольный треугольник Пьер не запретит, его мы и сможем получить.

«Стратегия» Пьера, при которой он не даст Вильгельму построить прямоугольный треугольник. Первым ходом соединим любые две точки. Наша стратегия будет заключаться в том, чтобы достраивать отрезки так, чтобы после очередного нашего хода все отрезки образовывали путь. Покажем, как этого добиться. Будем проводить индукцию по количеству сделанных нами ходов. После первого нашего хода все проведенные отрезки образуют путь длины 1, значит, база есть. Переход. Если Вильгельм соединяет путь с новой точкой, то просто соединяем еще одну точку (если такая есть) с одним из концов пути. Треугольник не образовался. Если же Вильгельм проводит отрезок между двумя точками не из пути, то соединяем один из концов этого отрезка с одним из концов пути, тем самым снова треугольник появиться не мог. Если в какой-то момент мы не можем сделать ход, то и Вильгельм сходить не сможет, а по выше указанной стратегии треугольники появиться не могли.

Является ли верным первое решение? Второе? Объясните, почему Вы так считаете. Свое решение здесь писать **не** *нужно.*

8. На плоскости нарисован неравнобедренный треугольник ABC и окружность, проходящая через точки A и B, а также через центр I вписанной окружности треугольника ABC (центры окружностей при этом не отмечены). Как с помощью *одной линейки* построить точку I?

«Решение» Рене́. Проведем лучи CA и CB до вторичного пересечения с окружностью в точках A' и B' соответственно. Соединим A' и B', точку пересечения полученного отрезка с AB обозначим через P. Проведем прямую CP, и ближайшая к C точка пересечения этой прямой с окружностью, описанной вокруг $AA'BB'$ и будет точкой I.

Прав ли Рене́? Если да, то приведите доказательство построения, а если нет, то укажите, почему, и приведите верное построение с обоснованием.