Финал по алгебре

17 апреля

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу `kazan-mat@mail.ru`. Общие комментарии по задачам смотрите на странице `http://www.kazan-math.info/`. Рекомендуем Вам периодически обновлять страницу, чтобы видеть самые последние общие комментарии. Напоминаем, что решения высылаются одним письмом на адрес `olymp.alg@gmail.com` до 18:00 по московскому времени. Подробные правила оформления Вы можете прочитать на сайте `http://www.kazan-math.info/`. Не забудьте пройти регистрацию!

Желаем успеха!

В следующем блоке задач оценивается полное решение, с обоснованием. Каждая задача оценивается из 7 баллов.

1. Из пункта A в пункт B одновременно отправились два велосипедиста. Первый велосипедист проехал весь путь со скоростью v, а второй поделил свой путь на семь равных участков и двигался с постоянной скоростью на каждом из участков. Известно, что скорость второго велосипедиста на каждом участке, кроме первого, была больше скорости на предыдущем участке на одну и ту же величину, а на четвертом участке он двигался со скоростью v. Кто приехал в пункт B раньше?

2. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее значение наибольшего из этих чисел.

3. Существует ли такая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что выполнено $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin x$ при любом вещественном x?

4. Пусть a, b, c — натуральные числа для которых выполнены два равенства: $ab + bc + ca + 2(a + b + c) = 8045$ и $abc - a - b - c = -2$. Найдите, чему равно $a + b + c$.

Для каждой из следующих задач приведено «решение». В этом «решении» необходимо найти ошибки, если таковые имеются, объяснить, почему те или иные рассуждения не верны и, возможно, написать верное решение. Конкретное задание к каждой задаче указано курсивом. Максимальный балл за каждую из задач равен 7.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y - \sin x = x - y; \\ \sin y - \sin z = z - y; \\ x - y + z = \pi \end{cases}$$

в вещественных числах.

«Решение» Франсуа. Перепишем исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin y + y = \sin x + x; \\ \sin y + y = \sin z + z; \\ x - y + z = \pi. \end{cases}$$

При этом функция $f(x) = \sin x + x$ — возрастающая, так как первая производная положительна. Значит, из первых двух уравнений следует, что $x = y = z$, и, подставляя три равные переменные в третье, получаем, что $x = y = z = \pi$.

Найдите ошибки в «решении» Франсуа, если таковые имеются; оцените решение Франсуа и напишите полное при необходимости.

6. В некоторой стране издревле семьи заводят детей до первого сына, при этом вероятность появления мальчика равна $\frac{1}{2}$. Какое отношение мужчин и женщин в этой стране?

«Решение» Андрея. Ответ 0. Заметим, что возможна ситуация, когда у семьи не рождается мальчик. Тогда они родят бесконечное число девочек. А значит отношение будет равно 0, так как делим на бесконечность.

Найдите ошибки в «решении» Андрея и напишите свое, если замечания к Андрею существенные.

7. Пусть a, b, c — три вещественных числа таких, что выполнено

$$\frac{a(b-c)}{b(c-a)} = \frac{b(c-a)}{c(b-a)} = k > 0$$

для некоторого вещественного k. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее k.

«Решение Огюстена». Будем показывать, что $k < 1$. Предположим противное. Тогда $\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)} \geqslant 1$. Домножая на $b(c-a)$ обе части, имеем $a(b-c) \geqslant b(c-a)$. Аналогично $b(c-a) \geqslant c(b-a)$. Получаем двойное неравенство $ab-ac \geqslant bc-ab \geqslant cb-ac$. Заметим, что если мы из суммы первого и второго выражений вычтем третье (*), то получим 0. Но так как отношение выражений положительно, то либо все они положительны, либо все отрицательны. Положительными они быть не могут, иначе (*) положительно. А если же все выражения отрицательны, то отношение первого и второго меньше 1. Итак, в обоих случаях мы получили противоречие. Значит, $k < 1$, но по условию оно же больше 0. Поэтому наибольшее целое число, не превосходящее k, равно 0.

Найдите ошибки, если они есть, оцените «решение» Огюстена и напишите свое, если приведенное содержит существенные недочеты.

8. Найдите все натуральные $n > 2$, для которых многочлен $P(x) = x^n + x^2 + 1$ делится нацело на многочлен $Q(x) = x^2 + x + 1$.

«Решение» Жозефа. Запишем $P(x) - Q(x) = x^n - x$. Так как многочлены x и $Q(x)$ взаимно просты, то $H(x) = x^{n-1} - 1$ должен делиться на $Q(x)$. Заметим, что $Q(x)$ и $x-1$ также взаимно просты, и при этом $H(x)$ делится на $x-1$, значит, многочлен $H(x)$ должен делиться на их произведение, поэтому вопрос задачи равносилен следующему: при каких n многочлен $x^{n-1} - 1$ делится на многочлен $x^3 - 1$. Если $n-1$ делится на 3, то по формуле сокращенного умножения получаем, что $x^{n-1} - 1$ на $x^3 - 1$ делится, а если $n-1$ на 3 не делится, то и многочлен $x^{n-1} - 1$ на $x^3 - 1$ не делится. Итак, подходят все n, дающие остаток 1 при делении на 3.

Найдите ошибки, если таковые имеются, оцените написанное «решение» и приведите свое, если изложенное выше не точно.